Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die Lösung von geodätischen Randwertproblemen in vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten M und deren numerische Berechnung. Dazu wird der von einer Untermannigfaltigkeit A in M induzierte geodätische Fluss im Tangentialbündel TM von M betrachtet. Letzterer ist essentiell für die Berechnung der Distanz zwischen A und einem beliebigen Punkt q in einer Zielmannigfaltigkeit Q in M, da jeder kürzeste Weg zwischen A und Punkten in Q eine Geodätische ist, die senkrecht auf A startet. Der geodätische Lift $\Theta_{A,Q} \subset TM$ ist eine geometrische Beschreibung aller A-orthogonalen Verbindungsgeodätischen zu Q als Teilmenge des Tangentialbündels und ermöglicht eine Untersuchung der lokalen Topologie des entsprechenden geodätischen Randwertproblems.

Es wird bewiesen, dass der geodätische Lift $\Theta_{A,Q}$ von transversalen Zielmannigfaltigkeiten lokal Euklidisch und daher eine Mannigfaltigkeit ist, so dass die Grundlage für eine stabile numerische Approximation von $\Theta_{A,Q}$ gegeben ist. Weiterhin wird der wichtigste nichtreguläre Fall untersucht, in dem eine tangentiale Zielkurve γ eine Fold-Bifurkation ihres geodätischen Lifts $\Theta_{A,\gamma}$ induziert. Auf Basis dieser geometrischen Beschreibung und mithilfe der Singularitätentheorie wird gezeigt, dass diese Bifurkation sowohl theoretisch, als auch numerisch, aufgelöst werden kann.

Die globale Topologie eines geodätischen Kurvenlifts $\Theta_{A,Q}$ ist essentiell für seine praktische Anwendbarkeit. Ist $\Theta_{A,Q}$ zusammenhängend, so ermöglicht der in dieser Arbeit beschriebene Ansatz die Berechnung aller A-orthogonalen Verbindungsgeodätischen zu jedem Punkt q auf Q durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Dazu werden zahlreiche zwei- und dreidimensionale Konfigurationen mit zusammenhängendem geodätischen Lift betrachtet. Dabei werden insbesondere Referenzmannigfaltigkeiten $A \subset M$ behandelt, in denen A-orthogonale Geodätische selbst zusammenhängende tangentiale Kurvenlifts induzieren. Da Letztere den ganzen umgebenen Raum M überdecken, ermöglicht der geodätische Kurvenlift in diesem Fall eine vollständige numerische Lösung des A-orthogonalen geodätischen Randwertproblems zu beliebigen Punkten in M. Damit wird insbesondere auch das von A in M induzierte Distanzproblem gelöst.

Als parametrische Schnittstelle für die numerischen Methoden in dieser Arbeit dient eine kontinuierliche Modellierung der umgebenen Mannigfaltigkeit M, die eine Auswertung der Riemannschen Metrik und ihrer Ableitungen erlaubt. Im Gegensatz zu vielen diskreten Modellen, welche auf einer stückweise linearen Darstellung von M beruhen, werden so komplexere Konzepte der Riemannschen Geometrie direkt numerisch zugänglich. Entsprechend wird für die Erklärung des geodätischen Kurvenlifts in dieser Arbeit auf numerisch berechnete Fokalkurven bzw. -flächen in zwei- und dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten zurückgegriffen. Die entsprechenden Beispiele belegen, dass die numerische Handhabung der Singularitäten der geodätischen Exponentialabbildung unproblematisch ist, falls ihre topologische Struktur geeignet berücksichtigt wird.

Abstract

This work discusses the solution of the geodesic boundary value problems in complete Riemannian manifolds M and their numerical computation. For this purpose the geodesic flow induced by a submanifold A in M is considered in the tangent bundle TM of M, which is essential for the computation of distances between A and arbitrary points q contained in a target manifold Q. The geodesic lift $\Theta_{A,Q} \subset TM$ yields a geometric description of all connecting geodesics starting orthogonally in A and ending up in q as a subset of TM and allows to describe the local topology of the respective geodesic boundary value problem.

It is proven that the geodesic lift $\Theta_{A,Q}$ of transversal target manifolds Q is locally Euclidean and therefore a manifold. This provides the theoretical fundament for a stable numerical computation of $\Theta_{A,Q}$. Furthermore an analysis of the most relevant irregular case is given, where a tangential target curve γ induces a fold bifurcation of its geodesic lift $\Theta_{A,\gamma}$. Building on these geometric descriptions and incorporating singularity theory it is shown, that this bifurcation can be solved theoretically and in practice.

The global topology of a geodesic curvelift $\Theta_{A,Q}$ is essential for its practical applicability. If $\Theta_{A,Q}$ is connected, the methods presented in this work allow to compute all connecting geodesics starting orthogonally in A and ending in an arbitrary point $q \in Q$ by solving an ordinary differential equation. This is exemplified by several two- and three-dimensional configurations inducing connected geodesic lifts. This particularly includes reference manifolds $A \subset M$, where geodesics starting orthogonally in A yield connected tangential geodesic curvelifts. As the latter cover the whole ambient space M, the geodesic curvelift allows in this case a complete numerical solution of the A-orthogonal geodesic boundary value problem to arbitrary points $q \in M$.

The parametric interface for the numerical methods in this word is provided by a continuous model the ambient manifold M, allowing to evaluate the Riemmanian metric and its derivatives. Contrary to many discrete approaches, which base on a piecewise linear model of M, this yields numerical access to more involved concepts of Riemannian geometry. Consequently the analysis of geodesic curvelifts is accompanied by numerically computed focal curves and surfaces in two- and three-dimensional manifolds. The respective examples indicate, that the numerical treatment of the singularities of the geodesic exponential map is feasible if one respects their topological structure.