Laplace Operatoren auf flachen Bündeln und deren Diskretisierung über zwei- und dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten

Von der Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von

M. Sc. Alexander Johann Vais
geboren am 07.01.1984
in Bukarest

2014

Inhaltsverzeichnis

1 **Einleitung** 9
1.1 Motivation und frühere Arbeiten 9
1.2 Beiträge dieser Arbeit 14

2 **Mathematische Konzepte** 17
2.1 Mannigfaltigkeiten 18
2.1.1 (Ko-) Tangentialräume, Vektorfelder und Einsformen 20
2.1.2 Die Einsteinsche Summenkonvention 22
2.1.3 Lokale Koordinaten und Basen von T_pM und T_p^*M 23
2.1.4 Transformationsverhalten von Vektorfeldern und Einsformen 24
2.1.5 Tensoren 25
2.1.6 Die riemannsche Metrik 28
2.2 Das Differenzialformenkalkül 31
2.2.1 Definitionen 31
2.2.2 Das Dachprodukt 32
2.2.3 Die lokale Darstellung von k-Formen 33
2.2.4 Die äußere Ableitung 34
2.2.5 Pullback von Differenzialformen 34
2.2.6 Integration von Differenzialformen 35
2.2.7 Skalarprodukt von Differenzialformen 36
2.2.8 Hodge-Dualität 37
2.2.9 Das Kodifferenzial 38
2.2.10 Der Hodge Laplace Operator 39
2.3 Algebraische Topologie 39
2.3.1 Algebraische Grundlagen 40
2.3.2 Die erste Fundamentalgruppe und Überlagerungen 42
2.3.3 Simplizialkomplexe 45
2.3.4 Triangulierte Mannigfaltigkeiten 47
2.3.5 Simpliziale Homologie 49
2.3.6 Simpliziale Kohomologie 51
2.3.7 Singuläre Homologie und Kohomologie 52
2.3.8 Fundamentalgruppe und erste (Ko-) Homologiegruppe 53
2.3.9 Die de Rham-Kohomologie und die Hodge Zerlegung 54
2.3.10 Dualität 57

3 **Modifizierte Laplace Operatoren** 61
3.1 Definitionen 62
3.2 Äquivalente MLBOs 64

3.3 Konstruktion geeigneter Einsformen ω 67
3.3.1 Normierung der harmonischen Basis 67
3.3.2 Berechnung mittels Hodge-Zerlegung 68
3.3.3 Berechnung mittels des Hodge Laplace Operators 69
3.3.4 Berechnung mittels harmonischer Funktionen 69
3.3.5 Berechnung von Homologie-Generatoren 70
3.4 Finite Elemente Diskretisierung von Δ_ω 73
3.4.1 Die variationelle Formulierung und Diskretisierung 74
3.4.2 Knotenbasierte Elemente 75
3.4.3 Kantenbasierte Elemente 78
3.4.4 Auswertung von Integralen 80
3.4.5 Diskretisierung der spektralen Zerlegung von Δ_ω 81
3.4.6 Diskretisierung des Hodge Laplace Operators 83
3.4.7 Lösen des verallgemeinerten Eigenwertproblems 83
3.5 Randbedingungen 84
3.5.1 Dirichlet Randbedingungen 85
3.5.2 Neumann/Robin Randbedingungen 85
3.6 Berücksichtigung induzierter Metriken 86
3.6.1 Gebiete im $\mathbb{R}^m$ 86
3.6.2 Immersierte Flächen 87
3.6.3 Hyperbolische und elliptische Mannigfaltigkeiten 88
3.7 Modelle der hyperbolischen und elliptischen Geometrie 91
3.8 Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten 97

4 Laplace Operatoren auf flachen Linienbündeln **101**
4.1 Motivation 102
4.2 Bündel 105
4.2.1 Vektorraumbündel 107
4.2.2 Prinzipalfaserbündel 109
4.3 Zusammenhänge in Vektorraumbündeln 111
4.3.1 Lokale Zusammenhangsformen 112
4.3.2 Krümmung 113
4.3.3 Paralleltransport und Holonomie 114
4.3.4 Flache Zusammenhänge in komplexen Linienbündeln 115
4.4 Laplace Operatoren auf Vektorraumbündeln 116
4.5 MLBOs auf flachen Linienbündeln 118
4.6 Konstruktion eines Bündelatlas 121
4.7 Bestimmung der flachen Linienbündel 123
4.8 Finite Elemente Diskretisierung von Δ_E 125
4.9 Visualisierung von Schnitten 126
4.10 Quasi-reelle Linienbündel 128
4.11 Cuts für elektromagnetische Berechnungen 130

5 Ergebnisse **133**
5.1 Vergleich äquivalenter MLBOs 136

5.2 Familien von MLBOs . . . 139
5.2.1 Modifizierte Spektren unter geometrischen Verformungen . . . 142
5.2.2 Modifizierte Heat Kernel . . . 144
5.2.3 Modifizierte Nullstellenmengen . . . 145
5.3 Dreidimensionale Beispiele . . . 148
5.3.1 Knotenkomplemente und Volumenkörper im $\mathbb{R}^3$ . . . 149
5.3.2 Vergleich mit durch harmonische Einsformen induzierten Cuts . . . 156
5.3.3 Abstrakte Mannigfaltigkeiten . . . 158

6 Quaternionische Dirac Operatoren auf Flächen **165**
6.1 Der Dirac-Operator in der Physik . . . 166
6.2 Clifford-Algebren . . . 169
6.2.1 Quaternionen . . . 170
6.2.2 Definition einer Clifford-Algebra . . . 171
6.2.3 Spingruppen . . . 174
6.2.4 Die Clifford-Algebra Cl_3 . . . 175
6.2.5 Beziehung zu den Quaternionen . . . 176
6.3 Begriffe aus der Spin-Geometrie . . . 176
6.4 Dirac-Operatoren über Flächen im $\mathbb{R}^3$ . . . 180
6.4.1 Spin-Strukturen und Spinorbündel . . . 180
6.4.2 Das quaternionische triviale Spinorbündel . . . 183
6.4.3 Lokale Darstellung und immersierte Flächen . . . 185
6.4.4 Umformulierung im Sinne des Differenzialformenkalküls . . . 186
6.4.5 Quaternionischen Funktionentheorie und konforme Immersionen . . . 190
6.5 Diskretisierung . . . 193
6.5.1 Diskretisierung via DEC . . . 193
6.5.2 Spektrale Zerlegung via FEM Diskretisierung . . . 194

7 Zusammenfassung und Ausblick **199**

Literatur **205**